Региональный этап всероссийской олимпиады школьников по математике в 2014/2015 учебном году

Мурманская область

Шифр участника: М-11-04, М2-11-03

Класс: 11

Количество баллов: 32

Результат участия: победитель

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г.Мурманск,
пр.Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-31, 31-34-82
№ _____ от "___" _____ 20___ г.
на исх № ____ от "___" _____ 20___ г.

М-и-04

11.1.

] $x_i = c_i + 1$, тогда:

~~$(x_1+2)(x_2+2)\dots(x_{13}+2) =$~~

$(c_1+2)(c_2+2)\dots(c_{13}+2) = -c_1\cdot(-c_2)\cdot\ldots\cdot(-c_{13})$

$(c_1+2)(c_2+2)\dots(c_{13}+2) = -c_1c_2c_3\dots c_{13}$.

Отсюда видно, что произв-я будут одинак. знаков,

~~тогда если~~ тогда и только тогда ~~кол~~ если слева и справа разное кол-во отрицат. мн-й. (~~иначе~~ если 0, то выполнится то, что нужно док-ть). При этом, если $c_i+2<0 \Rightarrow c_i<0$, значит справа отриц. мн-лей больше. Тогда найдётся какой-то $c_i<0$, а $c_i+2>0 \Rightarrow c_i=-1 \Rightarrow x_i=0$

Какой-то из x_i равен 0, что и требовалось док-ть.

	1	2	3	4
Σ	1	7	7	0

11.2.] всего x пар, а в каждой паре $x_1, x_2 \dots x_x$ детей. Общее кол-во детей обозначим X_s, (из разных супр. пар)

Для каждой пары Мама + Папа существует $2\cdot(X_s - X_i - X_j)$ способов собрать тройку, где i и j - номера пар из к-х взяты мама или папа. Умножено на 2, т.к. маму и папу ~~можно~~ из пары супруж. пар можно выбрать двумя сп-ми.

Пару из пары супр. пар можно выбрать $\frac{x(x-1)}{2}$ сп-ми, тогда всего спос-бов будет:

$$\frac{x(x-1)}{2}\cdot 2(X_s - 2(x-1)x_1 - 2(x-1)x_2 - \dots - 2(x-1)x_x =$$

$$= x(x-1)X_s - 2(x-1)X_s = X_s(x-1)(x-2) = 3630. =$$

$$= 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11^2$$

$(x-1)$ и $(x-2)$ - два подряд идущ. числа. Из данного набора мн-ли ~~супр~~ можно выбрать: 2 и 3, 5 и 6, 10 и 11

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183021, г. Мурманск,
пр. Героев-Североморцев, 2
тел. 21-36-55, 21-36-62
№ ____ от "____" ____ 20__ г.
на исх. № ____ от "____" ____ 20__ г.

М-11-04

Тогда x может быть 4, 7 или 12

~~4 пары мало,~~ если 7 пар, то $x_s = 121$ – не может быть т.к. при 7 парах $x_s \le 70$.

Если 12, то $x_s = 33$ – удовл.

Если 4 пары, то $x_s = 5 \cdot 11^2$ – не может быть т.к. при 4-х парах $x_s \le 40$.

Ответ: 33.

11.3. Пусть центр ~~м~~ пересеч. медиан - O.

$S_{AOB_1} = S_{OBA_1}$ (т. пересеч. мед. делит тр-ник на 6 равновеликих).

$\cancel{S_{AB_0B}}\ S_{AB_1B_0} = \frac{1}{2} S_{ACB_0} = \cancel{\frac{1}{2} S_{A_0OB}} = \frac{1}{2} S_{A_0BC} = S_{BA_0A_1}$

$$\begin{cases} S_{AB_1B_0} = S_{BA_0A_1} \\ S_{AOB_1} = S_{OBA_1} \end{cases} \Rightarrow S_{AOB_0} = S_{BOA_0}, \ \angle AOB_0 = A_0OB \text{ (вертик.)} \Rightarrow |A_0O|\cdot|OB| = |B_0O|\cdot|OA|$$

$|A_0O|\cdot|OB| = |B_0O|\cdot|OA|$

$|AO|\cdot|OA_0| = |B_0O|\cdot|OB|$ (стек. т. O)

$\frac{|OB|}{|B_0O|} = \frac{|B_0O|}{|OB|} \Rightarrow |OB| = |B_0O| = |A_0O| = |OA|$

аналогично для $|OC_0|$ и $|OC| \Rightarrow O$ - центр опис. окр. $\Rightarrow B_1O \perp AC$ и так для всех медиан $\Rightarrow ABC$ - равносторн.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г.Мурманск,
пр.Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82
№ ____ от "___" _____ 20__ г.
на исх.№ ____ от "___" _____ 20__ г.

11.5 cx^2+dx+e, $c\neq 0$. МЕ-11-03

$D=d^2-4ce>0$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{-d+\sqrt{d^2-4ce}}{2c} \\ x_2=\dfrac{-d-\sqrt{d^2-4ce}}{2c} \end{array}\right.$$

Докажем, что $c>0$ и $d\geq 0$,

тогда $x_2<0$.

~~$c(a^2+b^2)^2+d(2ab)^2+e\geq c$~~

5	6	7	8
7	0		

$c(a^2+b^2)^2+d(a^2+b^2)+e\geq c(4a^2b^2)+d(2ab)+e$

$c(a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2)+d(a^2+b^2-2ab)\geq 0$

$c(a^2-b^2)^2+d(a-b)\geq 0$

$(a-b)(c(a-b)(a+b)^2+d)\geq 0$

если $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$, тогда $c+d\geq 0$

если $\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$, тогда $-(-c+d)\geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} c\geq d \\ c\geq -d \end{cases} \Rightarrow c\geq 0$

($c\neq 0$, т.к. трёхчлен квадратный по ус-ю)

$\Downarrow$

$c>0$

a, b – произвольные числа!

если $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$, тогда $2d\geq 0 \Rightarrow d\geq 0$

$$x_2=\frac{-d-\sqrt{d^2-4ce}}{2c}$$

знаменатель >0, числитель <0 ($-d-\sqrt{d^2-4ce}$ строго меньше 0 т.к. 2 корня)

ч.т.д.

11.7. Предположим, что могло так оказаться. Назовём число неравное разности соседей особенным.

Найдём в круге наименьшее (или одно из наименьших) число a, которое не является особенным. Тогда возможны 2 случая:

а — наименьшее вообще или только среди особенных?

1) когда рядом с a стоит $b \geq a$, кот-е не является особенным;

2) когда рядом с a стоит особенное число.

I случай. есть два соседних числа a и b, ~~так~~ оба они неособенные, значит получаем часть круга

a b

$(a+b)$ - - - $(a+b)$!, среди двух чисел $(a+b)$ может быть только ~~одно~~ хотя бы одно ~~со~~ особенное, значит одна из веток пойдёт дальше, если же в этой ветке появится особенное число, значит продолжится другая.

$(2a+b)$
$(3a+2b)$
$(5a+3b)$
- - - -

почему эти числа возрастают?

Пусть обе ветки заканчиваются особенным числом, ~~тогда~~ а начинаются с чисел $(a+b)$, тогда получится, что ветки имеют разную длину, а особенное число одновременно

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
МУРМАНСКОЙ ОБЛАСТИ
ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ДЕТЕЙ
"Мурманский областной
центр дополнительного
образования детей
"ЛАПЛАНДИЯ"
183031, г.Мурманск,
пр.Героев-Североморцев, 2
тел. 31-35-51, 31-34-82
№ ____ от "__" ____ 20__ г.
на исх.№ ____ от "__" ____ 20__ г.

равняется суммам двух предыдущих из каждой ветви. ~~То~~

Ветвь, имеющая большую длину, имеет большую сумму двух последних чисел. Действительно, если продлить ветви, то получим:

1	2
a	b
a+b	a+b
2a+b	a+2b
3a+2b	2a+3b
5a+3b	3a+5b
8a+5b	

Видно, что если длины веток отличаются хотя бы одним числом, тогда у сумм ~~[illegible]~~ коэффициенты при „b" равны, а коэф-т при „a" больше у большей ветви.
Если длины веток отличаются больше, чем одним числом, то коэф-ты и при a и при b будут больше у большей ветви.
Если длиннее вторая ветвь, то рассуждения аналогичны. Получаем, что случай I исключён.

II случай сводится к I, т.к. с другой стороны от a будет стоять число $b \geq a$ и особенное будет равняться $a+b$, что удовлетворяет рассуждениям в I случае.

Ответ: нет.

Четность чисел 3 до не школьн

11.6. Из условия следует, что ~~из де~~ существует 4 равных отрезка с одним концом в центре Гр-та, а с другим концом на полусфере. Тогда центр грей-та лежит на перпенд. из ~~крайн~~ центра крышки., ~~это~~

Ответ: да.

?